

1995 年全国硕士研究生入学统一考试

理工数学一试题详解及评析

一、 填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答】 $e^6.$

【详解 1】 用第二类重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right\}^{\frac{6x}{\sin x}} = e^6.$$

【详解 2】 化为指数函数求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin x} \ln(1+3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \ln(1+3x)}{3x}} = e^6.$$

(2) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答】 $\int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4.$

【详解】

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt &= \frac{d}{dx} \left(x \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt \right) = \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt + x \cos(x^2)^2 (-2x) \\ &= \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4. \end{aligned}$$

(3) 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答】 4.

【详解】

$$\begin{aligned} &[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) \\ &= [(a+b) \times b] \cdot (c+a) + [(a+b) \times c] \cdot (c+a) \\ &= (a+b) \times c + (b \times c) \cdot a \\ &= (a \times b) \cdot c + (a \times b) \cdot c = 4. \end{aligned}$$

(4) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答】 $\sqrt{3}.$

【详解】 令 $a_n = \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$, 则当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{3} x^2 < 1$ 时,

即 $|x^2| < 3$, 也即 $|x| < \sqrt{3}$ 时, 此幂级数收敛,

因此 收敛半径为 $\sqrt{3}$.

(5) 设三阶方阵 A, B 满足关系式: $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【详解】 在已知等式 $A^{-1}BA = 6A + BA$ 两边右乘以 A^{-1} , 得

$$A^{-1}B = 6E + B,$$

$$\text{于是 } B = 6(A^{-1} - E)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

二、选择题

(1) 设有直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L

(A) 平行于 π .

(B) 在 π 上.

(C) 垂直于 π .

(D) 与 π 斜交.

【 】

【答】 应选 (C).

【详解】 直线 L 的方向向量 s 为

$$s = \{1, 3, 2\} \times \{2, -1, -10\} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -7\{4, -2, 1\}$$

与平面 π 的法向量 $n = \{4, -2, 1\}$ 平行, 应此直线 L 垂直于 π .

(2) 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0)$ 、 $f'(1)$ 、 $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$.

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

$$(C) f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0).$$

$$(D) f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0).$$

【 】

【答】 应选 (B) .

【详解】 由 $f''(x) > 0$, 知 $f'(x)$ 单调增加, 又

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) \quad (0 < \xi < 1),$$

根据 $f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$ 知,

$$f'(0) < f(1) - f(0) < f'(1).$$

可见正确选项为(B).

(3) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

【 】

【答】 应选 (A) .

【详解】 因为

$$\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - f(x) \frac{\sin x}{x} \right] \\ &= f'(0) - f(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} + f(x) \frac{\sin x}{x} \right] \\ &= f'(0) + f(0), \end{aligned}$$

可见, $F'(0)$ 存在 $\Leftrightarrow F'_-(0) = F'_+(0) \Leftrightarrow f'(0) - f(0) = f'(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

因此正确选项为 (A) .

(4) 设 $u_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, 则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

【 】

【答】 应选 (C) .

【详解】 因为 $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 单调递减 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$,由莱布尼茨判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ 收敛 ,而 $u_n^2 = \ln^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 ,因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也发散.

故正确选项为 (C) .

$$(5) \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则必有}$$

(A) $AP_1P_2 = B$.

(B) $AP_2P_1 = B$.

(C) $P_1P_2A = B$.

(D) $P_2P_1A = B$.

【 】

【答】 应选 (C) .

【详解】 P_1 是交换单位矩阵的第一、二行所得初等矩阵, P_2 是将单位矩阵的第一行加到第三行所得初等矩阵, 而 B 是由 A 先将第一行加到第三行, 然后再交换第一、二行两次初等交换得到的, 因此 $P_1P_2A = B$.

故正确选项为 (C) .

三、(1) 设 $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0, \text{ 求 } \frac{du}{dx}.$$

【详解】 等式 $u = f(x, y, z)$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx},$$

而 $\frac{dy}{dx} = \cos x$. 又等式 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\varphi_1' \cdot 2x + \varphi_2' \cdot e^y \frac{dy}{dx} + \varphi_3' \cdot e^y \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\text{解得 } \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi_3'} (2x\varphi_1' + e^y \cos x \varphi_2'),$$

$$\text{故 } \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi_3'} (2x\varphi_1' + e^{\sin x} \cos x \varphi_2').$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$.

【详解 1】 交换积分次序, 得

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(y)f(x) dy,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 f(y) dy \\ &= \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

【详解 2】 分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &= \int_0^1 \left(\int_x^1 f(y) dy \right) \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_x^1 f(y) dy \right) d \left(\int_1^x f(t) dt \right) \\ &= A^2 - \int_0^1 \left(\int_x^1 f(t) dt \right) d \left(\int_x^1 f(y) dy \right) \\ &= A^2 + \frac{1}{2} \left[\int_1^x f(t) dt \right]^2 \Big|_0^1 = A^2 - \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

四、(1) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

$$\text{【详解】 因为 } dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} d\sigma = \sqrt{2} d\sigma,$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} z dS &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} d\sigma = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{16}{3} \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{32}{9} \sqrt{2}.\end{aligned}$$

(2) 将函数 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

【详解】 因为

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0, \\ a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d \sin \frac{n\pi x}{2} \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1], (n=1, 2, \dots).\end{aligned}$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

五、设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 焦点记为

A. 已知 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$, 且 L 过点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 求 L 的方程.

【详解】 设点 M 的坐标为 (x, y) , 则切线 MA 的方程为

$$Y - y = y'(X - x).$$

令 $X = 0$, 则 $Y = y - xy'$, 故点 A 的坐标为 $(0, y - xy')$.

由 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$, 有

$$|y - xy'| = \sqrt{(x-0)^2 + (y - y + xy')^2},$$

化简后, 得

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x,$$

令 $z = y^2$, 得

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -x,$$

解得 $z = x(-x + c)$, 即 $y^2 = -x^2 + cx$.

由于所求曲线在第一象限内, 故 $y = \sqrt{cx - x^2}$. 再以条件 $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ 代入得 $c = 3$. 于是所求曲

线方程为

$$y = \sqrt{3x - x^2} \quad (0 < x < 3).$$

六、设函数 $Q(x, y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx + Q(x, y)dy$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x, y)dy,$$

求 $Q(x, y)$.

【详解】 由曲线积分与路径无关的条件知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$, 于是有

$$Q(x, y) = x^2 + C(y),$$

其中 $C(y)$ 为待定函数. 又

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_0^1 [t^2 + C(y)]dy = t^2 + \int_0^1 C(y)dy,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_0^t [1^2 + C(y)]dy = t + \int_0^t C(y)dy,$$

由题设知

$$t^2 + \int_0^1 C(y)dy = t + \int_0^t C(y)dy,$$

两边对 t 求导得

$$2t = 1 + C(t),$$

于是 $C(t) = 2t - 1$, 从而 $C(y) = 2y - 1$,

故有 $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$.

七、假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x) \neq 0, f(a) = f(b) = g(a) = g(b)$, 试证：

(1) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$;

(2) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

【详解】 (1) 用反证法：若存在点 $c \in (a, b)$ 使 $g'(c) = 0$, 则对 $g(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上分别应

用罗尔定理, 知存在 $\xi_1 \in (a, c)$ 和 $\xi_2 \in (c, b)$, 使 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$.

再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 知存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $g''(\xi_3) = 0$. 这与题设 $g''(x) \neq 0$ 矛盾, 故在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$.

(3) 令 $F(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F(a) = F(b) = 0, \text{ 根据罗尔定理知, 存在 } \xi \in (a, b), \text{ 使 } F'(\xi) = 0,$$

$$\text{即有 } f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0,$$

$$\text{故得 } \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

八、设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = (0, 1, 1)^T$, 求 A .

【详解】 设对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 $\xi = (x_1, x_2, x_3)^T$, 根据 A 为实对称矩阵的假设知

$$\xi^T \xi_1 = 0, \text{ 即 } x_2 + x_3 = 0, \text{ 解得}$$

$$\xi_2 = (1, 0, 0)^T, \xi_3 = (0, 1, -1)^T.$$

$$\text{于是由 } A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3),$$

有

$$\begin{aligned} A &= (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3)(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

九、设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = E$ (E 是 n 阶单位阵, A^T 是 A 的转置矩阵, $|A| < 0$, 求 $|A + E|$).

【详解】 根据 $AA^T = E$ 有

$$|A + E| = |A + AA^T| = |A(E + A^T)| = |A||E + A| = |A||A + E|,$$

$$\text{于是 } (1 - |A|)|A + E| = 0.$$

因为 $1 - |A| > 0$, 故 $|A + E| = 0$.

十、填空题

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 0.4, 则 X^2 的数学期望 $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 18.4.

【详解】 由题设知, X 服从 $n=10, p=0.4$ 的二项分布,

因此有 $E(X) = np = 4, D(X) = np(1-p) = 2.4$,

故

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 18.4$$

(2) 设 X 和 Y 为两个随机变量, 且

$P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$, 则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $\frac{5}{7}$.

【详解】 令 $A = \{X < 0\}, B = \{Y < 0\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{\max(X, Y) \geq 0\} &= 1 - P\{\max(X, Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\} \\ &= 1 - [1 - P(\overline{AB})] = P(\overline{A} + \overline{B}) \\ &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB}) \\ &= P\{X \geq 0\} + P\{Y \geq 0\} - P\{X \geq 0, Y \geq 0\} \\ &= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

十一、设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 求随机变量 $Y = e^x$ 的概率密度

$f_Y(y)$.

【详解】 根据分布函数的定义, 有

$$f_Y(y) = P\{Y < y\} = P(e^x < y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ P\{X < \ln y\}, & y \geq 1 \end{cases}$$

于是当 $y \geq 1$ 时, $f_Y(y) = P\{X < \ln y\} = \int_0^{\ln y} e^{-x} dx$.

因此所求概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{1}{y^2}, & y \geq 1 \end{cases}$$